

Επίλυση εξίσωσης με ακέραιο μέρος της μεταβλητής x

Βαγγελάτος Θ., Κουρκουλής Κ., Ρούσκας Ν., Φίλιπιδης Α., Φλέσσα Ι.,

Μαθητές Α Λυκείου

Πρότυπο Γ.Ε.Λ. Βαρβακείου Σχολής

Καθηγητής: Λυγάτσικας Ζήνων

Το **ακέραιο μέρος** ενός πραγματικού x , είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος μικρότερος ή ίσος του x . Συμβολικά θα έχουμε: έστω x ένας πραγματικός αριθμός. Το ακέραιο μέρος του x , είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος $[x]$ έτσι ώστε:

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

Για παράδειγμα: $[3,95] = 3$, $[-1,34] = -2$, $[\pi] = 3$, $[0,003] = 0$, $[e] = 2$, $[\sqrt{2}] = 1$

Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι η επίλυση ειδικών μορφών εξισώσεων των οποίων η μεταβλητή εμπλέκεται στην εξίσωση με το ακέραιο μέρος της.

Το πρόβλημα: Να λυθεί ως προς x η εξίσωση: $x^2 - 14[x] + 27 = 0$

Θα δώσουμε εδώ τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις στο πρόβλημα επίλυσης ως προς x της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Έστω $f(x) = x^2 - 14[x] + 27$.

1^η Προσέγγιση:

Παρατηρούμε πρώτα ότι η μεταβλητή x δεν μπορεί να είναι μικρότερη ή ίση του 1. Πράγματι:

Αν $x \leq 1$ τότε: $-14[x] \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 14[x] + 27 \geq 27 > 0$. Άρα, για $x \leq 1$ η εξίσωσή μας δεν έχει ρίζα.

Από τον ορισμό του ακεραίου μέρους, γνωρίζουμε ότι:

$$[x] \leq x \Leftrightarrow -14[x] \geq -14x \Leftrightarrow x^2 - 14[x] + 27 \geq x^2 - 14x + 27$$

Άρα, αν $p(x) = x^2 - 14x + 27$, τότε

$$p(x) \leq f(x) \tag{1}$$

Επίσης, από τον ορισμό, έχουμε ότι;

$$x - 1 < [x] \Leftrightarrow -14[x] < -14(x - 1) \Leftrightarrow x^2 - 14[x] + 27 < x^2 - 14x + 27 + 14$$

Άρα,

$$f(x) < p(x) + 14 \tag{2}$$

Επομένως, οι τιμές της μεταβλητής x που μηδενίζουν την $f(x)$, από τις (1) και (2), πρέπει να γυρίζουν αρνητικό το $p(x)$ και θετικό το $p(x) + 14$.

Ας δούμε λοιπόν για ποιές τιμές του x το πολυώνυμο $p(x)$ γίνεται αρνητικό και το $p(x) + 14$ θετικό.

Επειδή:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - 7 - \sqrt{22})(x - 7 + \sqrt{22}) \\ p(x) + 14 &= (x - 7 - 2\sqrt{2})(x - 7 + 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Και

$$7 - \sqrt{22} < 7 - 2\sqrt{2} < 7 + 2\sqrt{2} < 7 + \sqrt{22}$$

Το x πρέπει να ανήκει στα διαστήματα:

$$\begin{cases} x \in (7 - \sqrt{22}, 7 - 2\sqrt{2}) \approx (2.3, 4.17) \\ x \in (7 + 2\sqrt{2}, 7 + \sqrt{22}) \approx (9.82, 11.69) \end{cases}$$

Τότε όμως, $[x] = 2, 3, 4$ ή $9, 10, 11$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Για $[x] = 2 \Rightarrow x^2 = 14 \cdot 2 - 27 \Leftrightarrow x = \sqrt{1} = 1$. Αδύνατο.
- Για $[x] = 3 \Rightarrow x^2 = 14 \cdot 3 - 27 \Leftrightarrow x = \sqrt{15}$. Πράγματι $[\sqrt{15}] = 3$, δεκτή.
- Για $[x] = 4 \Rightarrow x^2 = 14 \cdot 4 - 27 \Leftrightarrow x = \sqrt{29}$. Αλλά $[\sqrt{29}] = 5$. Άρα απορρίπτεται.
- Για $[x] = 9 \Rightarrow x^2 = 14 \cdot 9 - 27 \Leftrightarrow x = \sqrt{99}$. Πράγματι $[\sqrt{99}] = 9$, δεκτή.
- Για $[x] = 10 \Rightarrow x^2 = 14 \cdot 10 - 27 \Leftrightarrow x = \sqrt{113}$. Πράγματι $[\sqrt{113}] = 10$, δεκτή.
- Για $[x] = 11 \Rightarrow x^2 = 14 \cdot 11 - 27 \Leftrightarrow x = \sqrt{127}$. Πράγματι $[\sqrt{127}] = 11$, δεκτή.

Συμπεράσμα, οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι:

$$x = \sqrt{15} \vee 3\sqrt{11} \vee \sqrt{113} \vee \sqrt{127}$$

2^η Προσέγγιση:

Έχουμε δει προηγουμένως ότι η μεταβλητή x δεν μπορεί να είναι μικρότερη ή ίση του 1. Συνεπώς, είναι ένας θετικός πραγματικός > 1 .

Επειδή ο $14[x]$ είναι άρτιος τότε ο $14[x] - 27$ είναι περιττός. Επειδή όμως

$$x^2 = 14[x] - 27$$

ο x^2 θα είναι και αυτός περιττός και $x^2 = 2k + 1$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Τότε:

$$[\sqrt{2k+1}] = \frac{x^2 + 27}{14} = \frac{k + 14}{7}$$

Επομένως ο 7 πρέπει να είναι διαιρέτης του $k+14$. Επιπλέον,

$$\frac{k+14}{7} \leq \sqrt{2k+1} < \frac{k+14}{7} + 1$$

Επιλύω τις δύο ανισώσεις χωριστά:

$$\frac{k+14}{7} \leq \sqrt{2k+1} \text{ τότε } k \in (35 - 7\sqrt{22}, 35 + 7\sqrt{22}) \text{ ή } k \in (2.16, 67.83)$$

Καί

$$\sqrt{2k+1} < \frac{k+14}{7} + 1, \text{ τότε } k \in \left(-\frac{1}{2}, 28 - 14\sqrt{2}\right) \cup (28 + 14\sqrt{2}, +\infty) \text{ ή } k \in (-0.5, 8.2) \cup (47.79, +\infty)$$

Άρα, οι τιμές του k θα είναι: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 48, 49, ..., 67 και του $k + 14$ 17, 18, 19, 20, 21, 22, 62, 63, ..., 81

Από τις τιμές αυτές τα πολλαπλάσια του 7 είναι μόνο:
21, 63, 70 και 77

Και συνεπώς το k παίρνει τις τιμές:

$$7(=21-14), 49(=63-14), 56(=70-14) \text{ και } 63(=77-14).$$

Επομένως οι τιμές του x θα είναι από τη σχέση $x^2 = 2k + 1$,

$$x = \sqrt{15} \vee 3\sqrt{11} \vee \sqrt{113} \vee \sqrt{127}$$

(Το x πρέπει να είναι θετικό.)

3^η Προσέγγιση: Εδώ θα δώσουμε γραφική λύση της εξίσωσης.

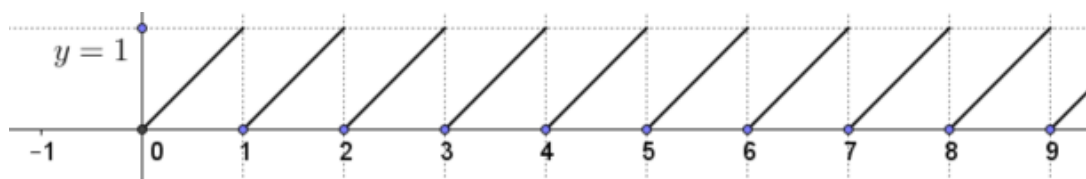
Έστω $y = x - [x]$. Τότε η αρχική εξίσωση γίνεται:

$$f(x) = x^2 - 14[x] + 27 = x^2 - 14(x - y) + 27 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{14}(x^2 - 14x + 27)$$

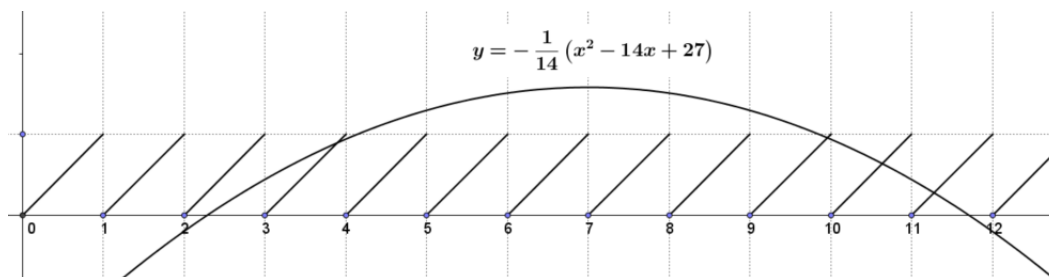
Επομένως οι λύσεις της $f(x)=0$ είναι οι λύσεις του συστήματος:

$$(\Sigma) = \begin{cases} y = x - [x] \\ y = -\frac{1}{14}(x^2 - 14x + 27) \end{cases}$$

Αλλά το γράφημα της πρώτης συνάρτησης στο σύστημα (Σ) , είναι το εξής:



Πρόκειται για μία φραγμένη συνάρτηση με φράγμα το 1. Τα δύο γραφήματα των συναρτήσεων στο σύστημα (Σ) δίνουν:



Τα κοινά τους σημεία βρίσκονται μεταξύ των διαστημάτων (3,4), (9,10), (10,11) και (11,12) με ακέραια μέρη $[x]$ αντίστοιχα 3, 9, 10 και 11.

Επομένως από το ότι $x > 0$ και $x^2 = 14 \cdot [x] - 27$ θα πάρουμε όπως στη πρώτη προσέγγιση:

$$x = \sqrt{15} \vee 3\sqrt{11} \vee \sqrt{113} \vee \sqrt{127}$$

■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1) Επίλυση της εξίσωσης $x^2 - 2[x] + 9 = 0$ με τη 2^η προσέγγιση.

Επειδή ο $2[x]$ είναι άρτιος τότε ο $2[x] - 9$ είναι περιττός. Αλλά

$$x^2 = 2[x] - 9,$$

Άρα και ο x^2 θα είναι περιττός της μορφής $x^2 = 2k + 1$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Τότε:

$$[\sqrt{2k+1}] = \frac{x^2 + 9}{2} = k + 5$$

Επιπλέον,

$$k + 5 \leq \sqrt{2k+1} < (k + 5) + 1$$

Επιλύω τις δύο ανισώσεις χωριστά:

$$k + 5 \leq \sqrt{2k+1}, \text{ η ανίσωση είναι αδύνατη.}$$

Και

$$\sqrt{2k+1} < (k + 5) + 1, \text{ τότε } k \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Άρα, δεν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ που να επαληθεύει το σύστημα των ανισώσεων.

Συνεπώς, δεν υπάρχει κάποιο $x = \sqrt{2k+1}$ που να επαληθεύει την εξίσωση

$$x^2 - 2[x] + 9 = 0.$$

Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη. ■

2) Επίλυση της εξίσωσης $x^2 - 8[x] + 1 = 0$ με τη 3^η προσέγγιση.

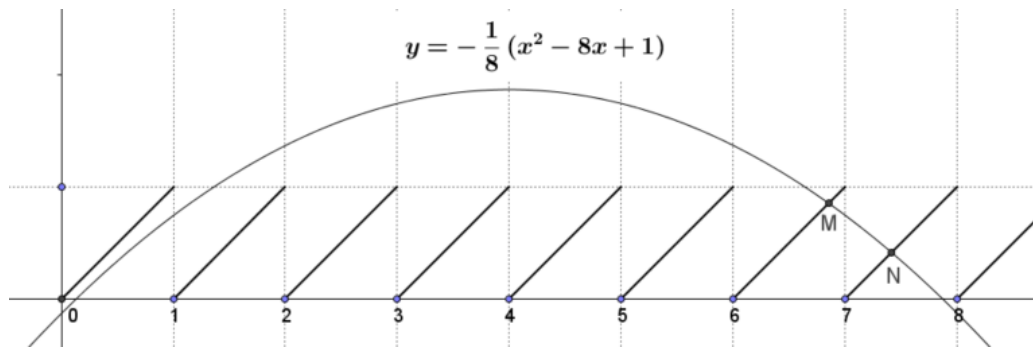
Θέτω $y = x - [x]$. Τότε η αρχική εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$x^2 - 8(x - y) + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{8}(x^2 - 8x + 1) \quad (1)$$

Άρα, όπως και στη 3^η Προσέγγιση, οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης θα είναι τα σημεία τομής των δύο καμπυλών:

$$(\Sigma) = \begin{cases} y = x - [x] \\ y = -\frac{1}{8}(x^2 - 8x + 1) \end{cases}$$

Τα δύο γραφήματα των συναρτήσεων $f(x) = x - [x]$ και $g(x) = -\frac{1}{8}(x^2 - 8x + 1)$ φαίνονται στο επόμενο σχήμα.



Τα σημεία τομής με τη παραβολή είναι τα σημεία Μ και Ν που βρίσκονται μέσα στα διαστήματα (6,7) και (7,8), αντίστοιχα. Τα δε ακέραια μέρη τους είναι 6 και 7. Άρα:

$$x > 0 \wedge x^2 = 8[x] - 1 \text{ τότε } \begin{cases} \text{αν } [x] = 6 \text{ τότε } x^2 = 8 \cdot 6 - 1 = 47 \text{ άρα } x = \sqrt{47} \\ \text{αν } [x] = 7 \text{ τότε } x^2 = 8 \cdot 7 - 1 = 55 \text{ άρα } x = \sqrt{55} \end{cases}$$

■