

Principia Mathematica: Θεωρήματα 70 & 71

Μαΐστρος Παναγιώτης και Πόθος Αλέξανδρος
Μαθητές Α Λυκείου
Πρότυπο ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής
Επιβλέπων Καθηγητής: Λυγάτσικας Ζήνων
26 Μαρτίου 2022

I. Εισαγωγή

Ο Νεύτωνας, ένας από τους μεγαλύτερους φυσικούς όλων των εποχών είναι ιδιαίτερα γνωστός για το έργο του *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, το οποίο θεωρείται ένα από τα σπουδαιότερα έργα στην ιστορία της φυσικής, όπως έλεγε ο Alexis Clairaut το 1747. Στον πρώτο τόμο του έργου του ένα από τα θέματα που τον προβληματίσαν ήταν η βαρυτική αλληλεπίδραση μεταξύ των πλανητών που περιγράφεται στα θεωρήματα 70 και 71.

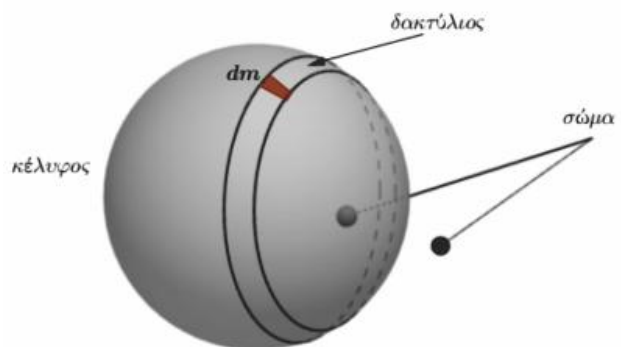
Το πρόβλημα της μελέτης της βαρυτικής αλληλεπίδρασης μεταξύ πλανητών δεδομένης μάζας απασχόλησε για 20 χρόνια τον Newton. Διαισθητικά πίστευε ότι ένας πλανήτης αλληλεπιδρά με τους άλλους σαν να έχει όλη τη μάζα του συγκεντρωμένη σε ένα σημείο. Ωστόσο η διαίσθηση δεν σημαίνει και γνώση. Έπρεπε να δώσει μια απόδειξη του ισχυρισμού έτσι ώστε να αποκτήσει επιστημονική αξία. Στο σχολείο, μαθαίνουμε ότι η βαρυτική έλξη μεταξύ δύο σωμάτων είναι ίση με το γινόμενο των δύο μαζών των σωμάτων επί τη σταθερά της βαρύτητας διαιρούμενο με το τετράγωνο της απόστασης των δύο σωμάτων. Βάζοντάς το σε εξίσωση:

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \text{ όπου } G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$$

Το πρόβλημα στο Principia εμφανίζεται ως εξής:

Όταν πρόκειται για πλανήτες, λαμβάνουμε την απόσταση ως το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ του κέντρου του και ενός δεδομένου σημείου στο διάστημα. Αλλά, πώς όλες οι στοιχειώδεις δυνάμεις, dF , που ασκούνται από σημεία στοιχειώδους μάζας, dm , συμβάλλουν στην καθαρή βαρυτική δύναμη σαν η μάζα του πλανήτη να συγκεντρωνόταν στο κέντρο του;

Η γεωμετρική απόδειξη του Newton στο Principia, δείτε [1], θεωρήματα 70 και 71, είναι στοιχειώδης και μεγαλοφυής. Ο Chandrasekhar, δείτε [4], το χαρακτήρισε *superb theorem*. Θα δούμε μια εξ ίσου στοιχειώδη απόδειξη χρησιμοποιώντας λογισμό καθώς και τη γεωμετρική απόδειξη του Principia.



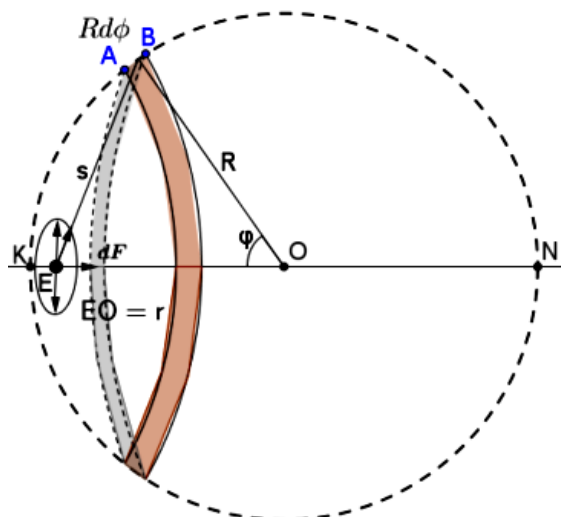
Θα θεωρήσουμε έναν πλανήτη σαν μια ομογενή σφαίρα δηλαδή η πυκνότητα να είναι ομοιόμορφα κατανομημένη σε ολόκληρη την επιφάνεια της σφαίρας. Ευτυχώς είναι μια κατάσταση που ικανοποιούν όλοι οι πλανήτες και πολλά άλλα αντικείμενα. Ένας πλανήτης μπορεί να θεωρηθεί ότι καλύπτεται από απείρως λεπτά κελύφη ή φλοιούς, από το εξωτερικό προς το εσωτερικό, όπου το κέντρο του καθενός βρίσκεται στο κέντρο του πλανήτη και και σε κάθε κέλυφος επικρατεί περίπου η ίδια πυκνότητα. Ένα κέλυφος είναι μια κούφια σφαίρα, όπως ακριβώς μια μπάλα.

II. Απόδειξη των Θεωρημάτων 70 & 71 με διαφορικό λογισμό

Θεωρούμε τον πλανήτη σαν ομογενή σφαίρα δηλαδή, η πυκνότητα είναι ομοιόμορφα κατανομημένη σε ολόκληρη την επιφάνεια της σφαίρας. Ευτυχώς είναι μια κατάσταση που ικανοποιούν όλοι οι πλανήτες και πολλά άλλα αντικείμενα. Ένας πλανήτης μπορεί να θεωρηθεί ότι καλύπτεται από απείρως λεπτά κελύφη ή φλοιούς, από το εξωτερικό προς το εσωτερικό, όπου το κέντρο του καθενός βρίσκεται στο κέντρο του πλανήτη και σε κάθε κέλυφος επικρατεί περίπου η ίδια πυκνότητα. Ένα κέλυφος είναι μια κούφια σφαίρα, όπως ακριβώς μια μπάλα.

Ο Newton έδωσε για το πρόβλημα δύο θεωρήματα: το XXX (70) που λέει ότι η βαρυτική δύναμη που ασκείται από το κέλυφος (shell) ενός πλανήτη μάζας M , σε ένα σώμα που βρίσκεται στο εσωτερικό του κελύφους είναι 0, και το XXXI που βεβαιώνει ότι αν ένα σώμα βρίσκεται στο εξωτερικό του κελύφους η βαρυτική δύναμη που ασκείται από το κέλυφος πάνω στο σώμα είναι η ίδια σαν όλη η μάζα του να ήταν στο κέντρο.

Θεώρημα 70: Η βαρυτική δύναμη στο εσωτερικό ενός κελύφους (ή φλοιού) είναι ίση με 0.



Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια σφαίρα κέντρου O . Ένα κέλυφος είναι μια κούφια σφαίρα που έχει κέντρο το κέντρο της σφαίρας O . Στο εσωτερικό του κελύφους βρίσκεται ένα σώμα E μάζας m . Στη συνέχεια χωρίζουμε το κέλυφος σε άπειρο αριθμό δακτυλίων (ο γραμμοσκιασμένος δακτύλιος του σχήματος) σε μεταβλητή απόσταση r από το σώμα E . Κάθε δακτύλιος έχει ένα απείρως μικρό πλάτος $\widehat{AB}$. Κάθε κέλυφος έχει το κέντρο του στο O έτσι η απόστασή του από το O είναι ίση με R και η απόσταση του σώματος E από το O είναι s . Η συνολική μάζα κάθε σφαιρικού κελύφους είναι M και η πυκνότητά του έστω σ .

Θα δείξουμε ότι η βαρυτική δύναμη που ασκείται από τον δακτύλιο πάνω στο σώμα E είναι 0.

Εφόσον ή πυκνότητα του κελύφους είναι $\sigma = \frac{M}{4\pi R^2}$ η συνολική μάζα του δακτυλίου θα είναι:

$$\begin{aligned} M' &= \sigma \cdot \text{εμβαδόν του δακτυλίου} \\ &= \sigma \cdot 2\pi \cdot R \cdot \eta\mu(\varphi) \cdot R \cdot d\varphi \\ &= \frac{M}{4\pi R^2} \cdot 2\pi \cdot R \cdot \eta\mu(\varphi) \cdot R \cdot d\varphi \\ &= \frac{M\eta\mu(\varphi)}{2} d\varphi \end{aligned}$$

Όλη η μάζα του δακτυλίου βρίσκεται σε απόσταση s από το σημείο E και η βαρυτική δύναμη του δακτυλίου πάνω στο σώμα είναι μόνο στην οριζόντια κατεύθυνση EO . Ενώ οι δυνάμεις στις κάθετες διευθύνσεις προς την EO είναι διανυσματικά αντίθετες και ίσες με τελικό άθροισμα 0, εξ αιτίας της συμμετρίας. Έτσι:

$$\begin{aligned} dF &= \frac{G \cdot M' \cdot m}{s^2} \sin(\theta) \\ &= \frac{G \cdot M \cdot m \cdot \eta \mu(\varphi) d\varphi}{2s^2} \sin(\theta) \\ &= \frac{G \cdot M' \cdot m \cdot \sin(\theta)}{2s^2} \eta \mu(\varphi) d\varphi \\ &= - \frac{G \cdot M \cdot m \cdot \sin(\theta)}{2s^2} d(\sin(\varphi)) \end{aligned} \quad (1)$$

Από το νόμο του συνιμητόνου έχουμε $R^2 = s^2 + r^2 - 2rs \sin(\theta)$ και $s^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \sin(\varphi)$

Άρα,

$$\sin(\theta) = \frac{s^2 + r^2 - R^2}{2rs} \quad \text{και} \quad \sin(\theta) = \frac{R^2 + r^2 - s^2}{2Rr} \Rightarrow -d(\sin(\varphi)) = \frac{s}{Rr} ds$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην εξίσωση (1) έχουμε:

$$dF = \frac{G \cdot M \cdot m \cdot (s^2 + r^2 - R^2)}{4 \cdot R \cdot r^2 \cdot s^2} ds \quad (2)$$

Επομένως η συνολική βαρυτική δύναμη που ασκείται από τον δακτύλιο πάνω στο σώμα E θα είναι ένα άθροισμα (ολοκλήρωμα) από το σημείο K έως το N ή αλγεβρικά από το $R - r$ έως $R + r$:

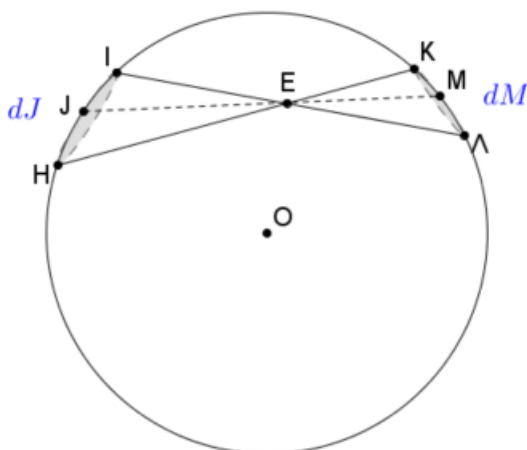
$$\begin{aligned} F &= \int_{R-r}^{R+r} dF ds \\ &= \frac{G \cdot M \cdot m}{4Rr^2} \int_{R-r}^{R+r} \frac{s^2 + r^2 - R^2}{s^2} ds \\ &= \frac{G \cdot M \cdot m}{4Rr^2} \left(s + \frac{R^2 - r^2}{s} \right) \Big|_{R-r}^{R+r} \\ &= \frac{G \cdot M \cdot m}{4Rr^2} \left(\left(R + r + \frac{R^2 - r^2}{R + r} \right) - \left(R - r + \frac{R^2 - r^2}{R - r} \right) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Το θεώρημα έχει αποδειχθεί. Πάνω σε κάθε σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό μιας σφαίρας δεν εξασκείται καμία βαρυτική δύναμη από τη σφαίρα.

■

Στο δεύτερο θεώρημα, θεώρημα 71, ο Newton αποδεικνύει ότι αν το σώμα είναι εξωτερικό της σφαίρας, τότε όλες οι βαρυτικές δυνάμεις από μικροσκοπικά σημεία σε όλο το κέλυφος που ασκούνται πάνω στο σώμα εξισώνονται με τη βαρυτική δύναμη που ασκείται στο σώμα από τις μάζες τους σαν να βρισκόταν στο κέντρο της σφαίρας. Συγκεκριμένα:

Θεώρημα 71: Ένα σφαιρικό ομογενές σώμα επηρεάζει τις βαρυτικές δυνάμεις σε εξωτερικά αντικείμενα σαν να ήταν όλη η μάζα του στο κέντρο.



$$EH \cdot EK = EI \cdot EL \Rightarrow \frac{EH}{EI} = \frac{EL}{EK}$$

Επίσης, $\angle I\hat{E}H = \angle K\hat{E}L$ άρα τα τρίγωνα IEH και KEl είναι όμοια.

Φέρω τη διχοτόμο EJ της γωνίας $\angle I\hat{E}H$ της οποίας η προέκταση EM είναι επίσης η διχοτόμος της $\angle K\hat{E}L$. Οι δύο ευθείες KH και IL περιστρέφονται γύρω από την JM και γράφουν δύο απειροστές επίπεδες επιφάνειες πάνω στη σφαίρα του κελύφους dJ και dM έτσι ώστε $E\hat{J}H = E\hat{M}K$. Οι δύο απειροελάχιστες επιφάνειες dJ και dM είναι όμοιες ελλείψεις¹ επειδή οι λόγοι των αξόνων (μεγάλος/μικρός) είναι ίσοι. Πράγματι, έχουμε $\frac{IH}{KL} = \frac{EJ}{EM}$ από την άλλη αν κάνουμε την ίδια διαδικασία για του μικρούς άξονες θα βρούμε $\frac{ih}{kl} = \frac{EJ}{EM}$.

Άρα, τα εμβαδά των δύο ελλείψεων S_{IH} και S_{KL} έχουν λόγο ίσο με το λόγο των τετραγώνων των αποστάσεων EJ και EM . Διαφορετικά:

$$\frac{S_{TH}}{S_{KL}} = \frac{EJ^2}{EM^2}$$

Εφόσον η βαρυτική δύναμη που ασκείται στο σώμα E κατά τη διεύθυνση JM από τις δύο ελλειπτικές επιφάνειες είναι ανάλογη της μάζας επί το αντίστροφο του τετραγώνου της απόστασης από το E , οι βαρυτικές δυνάμεις πάνω στο E είναι ανεξάρτητες της θέσης του E στο εσωτερικό του κελύφους. Επομένως, οι δύο βαρυτικές δυνάμεις που ασκούνται από τις απειροελάχιστες επιφάνειες dJ και dM είναι ίσες και αντίθετες και κανένα σημείο του κελύφους δεν ασκεί κάποια δύναμη στο σημείο E .

■

Βιβλιογραφία

- [1] **Newton Isaac**, (1723): *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, Amsterdam: Sumptibus Societatis.
- [2] **Newton Issac**, (1846): *Newyon's Principia: The Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Translation by Motte Andrew in New York, ed. by Daniel Ader.

¹ Δύο ελλείψεις είναι όμοιες αν έχουν την ίδια εκκεντρότητα ή διαφορετικά, αν οι λόγοι των δύο αξόνων (μεγάλου άξονα /μικρού άξονα) των ελλείψεων, είναι ίσος.

- [3] **Newton Isaac**, (1999): *The Principia, A New Translation*, I. Bernard Cohen and Anne Whitman, preceded by a Guide to Newton's Principia by I. Bernard Cohen (University of California Press, Berkeley), Book I, Sec. 12, p. 590.
- [4] **Chandrasekhar S.**, (1995): *Newton's Principia for the Common Reader*, Clarendon Press, Oxford, Secs. 1 and 15.
- [5] **Schmid Cristoph**, (2012): *Newton's superb theorem: A elementary geometric proof*, in <https://arxiv.org/abs/1201.6534v1>