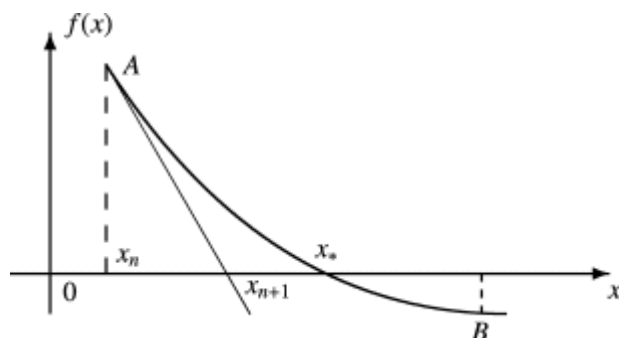


ΟΜΙΛΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΡΟΤΥΠΟ ΓΕΛ ΒΑΡΒΑΚΕΙΟΥ ΣΧΟΛΗΣ
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2025-26

Ακολουθίες πραγματικών αριθμών και εφαρμογές



ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΕΚΠ/ΚΟΥ	ΓΛΕΝΗΣ ΣΠΥΡΟΣ
ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑ	ΠΕ03
ΤΙΤΛΟΣ ΟΜΙΛΟΥ	Ακολουθίες πραγματικών αριθμών και εφαρμογές
ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΟΜΙΛΟΥ	Όμιλος αριστείας μαθηματικών
ΑΡΙΘΜΟΣ ΩΡΩΝ ΟΜΙΛΟΥ ΑΝΑ ΕΒΔΟΜΑΔΑ	2 ώρες
ΤΑΞΕΙΣ ΠΟΥ ΑΠΕΥΘΥΝΕΤΑΙ	Α΄, Β΄, Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΔΟΚΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	Το αντικείμενο του ομίλου έχει να κάνει κυρίως με την ανάδειξη των λεγόμενων «Εφαρμοσμένων Μαθηματικών» δηλαδή μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων που είτε αφορούν στα μαθηματικά είτε άλλες επιστήμες. Κάθε τέτοια μέθοδος υποστηρίζεται από μια θεωρία (ορισμούς και θεωρήματα ή προτάσεις) που αφενός θέτει το πλαίσιο εφαρμογής της κι αφετέρου εξασφαλίζει την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων της. Οι πυλώνες που θα στηρίξουν την ύλη είναι: η έννοια της ακολουθίας και το όριο της, το Θεώρημα Bolzano – Weierstrass, η έννοια της συνέχειας και της παραγώγου και το θεώρημα

	σταθερού σημείου του Banach. Οι στόχοι που τίθενται για τους μαθητές είναι: • Να μάθουν τι είναι ακολουθία, τις βασικές αλγεβρικές ιδιότητες των ακολουθιών και απλές εφαρμογές τους. • Να μάθουν τι είναι το όριο ακολουθίας και πώς να υπολογίζουν. • Να μάθουν τι είναι σειρά, πώς να ελέγχουν αν συγκλίνει και πως να υπολογίζουν το άθροισμα της σειράς. • Να μάθουν το Θεώρημα Bolzano – Weierstrass και να το εφαρμόζουν στις συνεχείς συναρτήσεις. • Να μάθουν το θεώρημα σταθερού σημείου, την απόδειξή του και τη γεωμετρική του ερμηνεία. • Να μάθουν την έννοια της παραγώγου και τα θεωρήματα Μέσης Τιμής Lagrange, και Taylor. • Να μάθουν τις προσεγγιστικές μεθόδους επίλυσης εξισώσεων: διχοτόμησης, σταθερού σημείου, Newton – Raphson και πώς να τις εφαρμόζουν.
ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ	Μετωπική διδασκαλία, μέθοδος project με φύλλα εργασίας.
ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ/ΔΡΑΣΕΩΝ	Επισυνάπτεται
ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ	Θα διατεθούν σημειώσεις και φύλλα εργασίας σε ψηφιακή μορφή, θα δημιουργηθεί ηλεκτρονική τάξη
ΤΡΟΠΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΜΑΘΗΤΩΝ	ΒΑΘΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΤΡΟΠΟΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ	ΕΒΔΟΜΑΔΙΑΙΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ
ΩΡΕΣ ΕΒΔΟΜΑΔΙΑΙΩΣ	2 ΩΡΕΣ
ΗΜΕΡΑ, ΩΡΑ,	Δευτέρα, 2.15μμ-3.40μμ
ΤΟΠΟΣ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗΣ	Βαρβάκειο Λύκειο
ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕ ΦΟΡΕΙΣ κ.λπ.	ΣΕΜΦΕ, Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΚΕΨΕΙΣ	Όχι.
ΠΑΡΑΔΟΤΕΑ	Ψηφιακό υλικό μαθήματος: σημειώσεις, σχέδια μαθήματος και φύλλα εργασίας.

Προγραμματισμός ύλης (curriculum)

Εβδ.	Τίτλος	Περιγραφή
1 ^η – 2 ^η	Ιδιότητες Φυσικών Αριθμών	• Αρχή Ελαχίστου • Αρχή της Επαγωγής • Μέθοδος της Επαγωγής, παραδείγματα • Θέματα προς μελέτη: ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης Φυσικών Αριθμών, Τρίγωνο Pascal και Διωνυμικό Ανάπτυγμα.
3 ^η	Το αξίωμα της Πληρότητας των Πραγματικών Αριθμών	• Φραγμένα υποσύνολα, supremum, infimum. • Αξίωμα Πληρότητας και ύπαρξη της τετραγωνικής ρίζας του 2. • Αρχιμήδεια ιδιότητα, ακέραιο μέρος. • Θέματα προς μελέτη: Η πυκνότητα των ρητών και των άρρητων αριθμών στο $\mathbb{R}$.
4 ^η	Ειδικά Θέματα	• Ανισότητες: Bernoulli, Cauchy – Schwarz, A-G mean. • Ιδιότητες των sup, inf.
5 ^η – 6 ^η	Η έννοια της ακολουθίας.	• Ορισμός, παραδείγματα, εφαρμογές.

		• Αναδρομικός τύπος ακολουθίας, παραδείγματα: αριθμητική και γεωμετρική πρόοδος, Fibonacci. • Γνησίως μονότονες ακολουθίες. • Φραγμένες ακολουθίες. Θέματα προς μελέτη: Ακολουθίες που ορίζονται αναδρομικά και είναι μονότονες και φραγμένες, ανατοκισμός και χρεωλυσία.
7 ^η - 8 ^η	Όριο ακολουθίας	• Ορισμός πεπερασμένου ορίου ακολουθίας και μοναδικότητα • Ακολουθίες που δε συγκλίνουν σε κάποιον αριθμό. • Κριτήριο παρεμβολής • Πράξεις με όρια ακολουθιών • Βασικά όρια ακολουθιών • Θέμα προς μελέτη: Αποδείξεις και υπολογισμοί με όρια ακολουθιών.
9 ^η -10 ^η	Ακολουθίες που συγκλίνουν στο άπειρο, κριτήρια σύγκλισης ακολουθιών.	• Ορισμός ακολουθίας που συγκλίνει στο άπειρο. • Κριτήριο λόγου • Κριτήριο ρίζας • Μονότονες και φραγμένες ακολουθίες • Θέματα προς μελέτη: ο αριθμός e, κιβωτισμένα διαστήματα, συνεχή κλάσματα..
11 ^η - 12 ^η	Υπακολουθίες και το Θεώρημα Bolzano – Weierstrass, βασικές ακολουθίες.	• Ορισμός υπακολουθίας • Σημεία συσσώρευσης ακολουθίας και σύγκλιση υπακολουθίας • Ύπαρξη μονότονης υπακολουθίας μιας ακολουθίας

		• Απόδειξη του Θεωρήματος B-W. • Ορισμός βασικής ακολουθίας • Σύγκλιση βασικών ακολουθιών. • Θέματα προς μελέτη: απόδειξη του B-W με κιβωτισμό, $\limsup$ και $\liminf$ ακολουθίας.
13 ^η - 14 ^η	Σειρές	• Ορισμός της σειράς, συγκλίνουσες και αποκλίνουσες σειρές. • Πράξεις με σειρές • Σύγκλιση Γεωμετρικής σειράς, τηλεσκοπικά αθροίσματα, αρμονική σειρά. • Κριτήρια σύγκλισης: απόλυτη σύγκλιση, κριτήριο σύγκρισης, οριακό κριτήριο σύγκρισης. • Θέματα προς μελέτη: Το e ως όριο σειράς και απόδειξη ότι είναι άρρητος, κριτήρια λόγου και ρίζας για σύγκλιση σειρών, εμβαδόν παραβολικού χωρίου.
15 ^η – 16 ^η	Συνεχείς συναρτήσεις και το Θεώρημα Bolzano.	• Ορισμός συνεχούς συνάρτησης • Αρχή της μεταφοράς • Παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων • Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις • Θεώρημα Bolzano • Συναρτήσεις συστολής • Θεώρημα Σταθερού σημείου του Banach • Θέματα προς μελέτη: Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών, Θεώρημα Μέγιστης κι Ελάχιστης Τιμής, συνεχής επέκταση συνάρτησης, Ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις

17 ^η	Το Θεώρημα της τηγανίτας	• Πραγματικές Συναρτήσεις δυο μεταβλητών • Συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις δυο μεταβλητών • Θεώρημα Borsuk – Ulam • 1^ο Θεώρημα της Τηγανίτας • Θέματα προς μελέτη: 2^ο Θεώρημα της Τηγανίτας
18 ^η	Όριο συνάρτησης	• Ορισμός, ιδιότητες, πράξεις με όρια.
19 ^η – 20 ^η	Παράγωγος συνάρτησης	• Ορισμός παραγώγου, γεωμετρική ερμηνεία. • Παράγωγος και συνέχεια • Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων • Πράξεις με παραγώγους • Θεώρημα Μέσης Τιμής Lagrange, Θεώρημα Taylor. • Θέματα προς μελέτη: Συναρτήσεις με φραγμένη παράγωγο που είναι συστολές, προσέγγιση συναρτήσεων από πολυώνυμα Taylor.
21 ^η	Επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης εξισώσεων μιας μεταβλητής.	• Μέθοδος της διχοτόμησης • Μέθοδος σταθερού σημείου • Μέθοδος Newton – Raphson • Θέματα προς μελέτη: ταχύτητα σύγκλισης των παραπάνω επαναληπτικών μεθόδων, υπολογισμός τετραγωνικής ρίζας.

Βιβλιογραφία

1. Απειροστικός Λογισμός Ι , ΙΙ , Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος, Γιαννακούλιας.
2. Απειροστικός Λογισμός Ι, πρόχειρες σημειώσεις 2009, Απόστολος Γιαννόπουλος.
3. Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, πρόχειρες σημειώσεις 2010-11, Απόστολος Γιαννόπουλος.

4. Απειροστικός Λογισμός Ι, πρόχειρες σημειώσεις 2024, Αντώνης Τσολομούτης.
5. Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, πρόχειρες σημειώσεις 2024, Αντώνης Τσολομούτης.
6. Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach, Ευκλείδης Β΄ Δεκέμβριος 2012.
7. Αριθμητικές Μέθοδοι, Γεώργιος Καραμπατζός.
8. Αριθμητική Ανάλυση, πρόχειρες σημειώσεις 2008, Κώστας Χουσιάδας.
9. Θεωρήματα Σταθερού Σημείου και Διδακτικές Εφαρμογές, διπλωματική εργασία
Γεώργιος Κυριακόπουλος.